

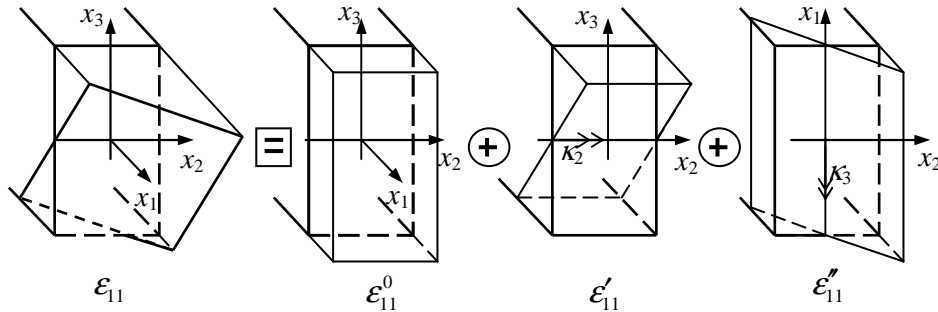
Rozdział V

Złożone przypadki wytrzymałościowe

Analizować będziemy ogólny przypadek stanu naprężeń i odkształceń w pręcie pryzmatycznym wywołany jednoczesnym działaniem siły osiowej i poprzecznej oraz momentów zginających. Problem analizowany będzie w zakresie sprężystym i lepkosprężystym oraz z uwzględnieniem nieliniowości fizycznej.

Punktem wyjściowym tych rozważań jest postulat płaskości przekrojów przed i po deformacji, co oznacza, iż stan odkształceń jest liniową funkcją położenia punktów przekroju (x_2, x_3) czyli

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + \kappa_2 x_3 - \kappa_3 x_2$$



Rys. 5.0a

Z zależności tej wynika, iż odkształcenie w ogólności jest sumą wydłużeń (ε_{11}^0), krzywizny κ_2 ($\varepsilon'_{11} = \kappa_2 x_3$) oraz krzywizny κ_3 ($\varepsilon''_{11} = -\kappa_3 x_2$).

a) Liniowa sprężystość

W zakresie liniowo-sprężystym naprężenia $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ zaś wydłużenia ε_{11}^0 i krzywizny wyrażają się wzorami

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{P}{EF}, \quad \kappa_2 = \frac{M_2}{EJ_{22}}, \quad \kappa_3 = \frac{M_3}{EJ_{33}}$$

stąd wzory na rozkłady odkształceń ε_{11} i naprężeń w przekroju

$$\varepsilon_{11} = \frac{P}{EF} + \frac{M_2 x_3}{EJ_{22}} - \frac{M_3 x_2}{EJ_{33}}$$

$$\sigma_{11} = \frac{P}{F} + \frac{M_2 x_3}{J_{22}} - \frac{M_3 x_2}{J_{33}}$$

Przytoczone wzory dotyczą rozkładu naprężeń normalnych σ_{11} i wydłużeń ε_{11} w płęcie liniowo-sprężystym.

We wzorach tych P , M_2 , M_3 , F , J_{22} , J_{33} są kolejno siłą osiową i momentami zginającymi, polem przekroju i momentami bezwładności (rzędu 2) liczonymi względem osi x_2 i x_3 jako głównych centralnych osi bezwładności przekroju.

b) Nieliniowa sprężystość

W zakresie nieliniowo - sprężystym naprężenie opisane jest wzorem

$\sigma_{11} = A \varepsilon_{11}^N$, przy $N = \frac{1}{n}$, zaś wydłużenia

$$\varepsilon_{11}^0 = \left(\frac{\sigma_{11}}{A} \right)^n \rightarrow \varepsilon_{11}^0 = \left(\frac{P}{AF} \right)^n$$

a krzywizny κ_2 i κ_3 relacjami

$$M_2 = \int_F \sigma'_{11} x_3 dF = AJ_{22}(N+1)\kappa_2^{1/n} \rightarrow \kappa_2 = \left(\frac{M_2}{AJ_{22}(N+1)} \right)^n,$$

$$J_{22}(N+1) = \int_F x_3^{N+1} dF$$

$$M_3 = \int_F \sigma''_{11} x_2 dF = AJ_{33}(N+1)\kappa_3^{1/n} \rightarrow \kappa_3 = \left(\frac{M_3}{AJ_{33}(N+1)} \right)^n,$$

$$J_{33}(N+1) = \int_F x_2^{N+1} dF$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia do warunku liniowości odkształceń otrzymamy

$$\varepsilon_{11} = \left(\frac{P}{AF} \right)^n + \left(\frac{M_2}{AJ_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{M_3}{AJ_{33}(N+1)} \right)^n x_2$$

przy czym x_2 i x_3 to główne centralne osie bezwładności.

Rozkłady naprężeń wyliczymy ze wzorów

$$\varepsilon_{11} = \left(\frac{\sigma_{11}}{A} \right)^n \rightarrow \sigma_{11}^n = \left(\frac{P}{F} \right)^n + \left(\frac{M_2}{J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{M_3}{AJ_{33}(N+1)} \right)^n x_2$$

$$\sigma_{11} = \left[\left(\frac{P}{F} \right)^n + \left(\frac{M_2}{J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{M_3}{J_{33}(N+1)} \right)^n x_2 \right]^N$$

c) Lepkosprężystość liniowa

W liniowej lepkosprężystości $\sigma_{11} = E * d\varepsilon_{11}$ lub $\varepsilon_{11} = G * d\sigma_{11}$, wydłużenia ε_{11}^0 określa wzór

$$\varepsilon_{11}^0 = G * d\sigma_{11} \rightarrow \varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{F} G * dP$$

natomiast krzywizny κ_2 i κ_3 – wyrażenia

$$M_2 = \int_F \sigma'_{11} x_3 dF = J_{22} E * d\kappa_2 \rightarrow \kappa_2 = \frac{M_2}{J_{22}} * dG$$

$$M_3 = \int_F \sigma''_{11} x_2 dF = J_{33} E * d\kappa_3 \rightarrow \kappa_3 = \frac{M_3}{J_{33}} * dG$$

Po podstawieniu tych wyrażen do warunków liniowości odkształcen otrzymamy

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{F} P * dG + \frac{M_2}{J_{22}} * dG x_3 - \frac{M_3}{J_{33}} * dG x_2$$

Z tego wzoru po wykorzystaniu równania fizycznego $\varepsilon_{11} = \sigma_{11} * dG$ uzyskamy rozkłady naprężeń

$$\sigma_{11} = \frac{P}{F} + \frac{M_2 x_3}{J_{22}} - \frac{M_3 x_2}{J_{33}}$$

Wynika stąd, iż rozkłady naprężeń (**ale nie odkształcen !**) w zadaniach sprężystych i lepkosprężystych będą takie same.

d) Zginanie ukośne – zadanie nieliniowo - sprężyste

Z podanych wzorów otrzymamy jako przypadki szczególne równania określające stany naprężeń i odkształcen w zginaniu ukośnym i ściskaniu mimośrodowym.

Zginanie ukośne określa warunek $P=0$, natomiast rozciąganie mimośrodowe zależności $M_2 = P \overset{\circ}{x}_2$ oraz $M_3 = P \overset{\circ}{x}_3$, gdzie $(\overset{\circ}{x}_2, \overset{\circ}{x}_3)$ są współrzędnymi punktu przyłożenia siły P w przekroju.

W konsekwencji w zginaniu ukośnym rozkład naprężeń w zadaniach nieliniowych wyznaczmy z równania

$$\sigma_{11}^n = \left(\frac{M_2}{J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{M_3}{J_{33}(N+1)} \right)^n x_2$$

którego przypadkiem szczególnym, kiedy $n=1$, jest klasyczny wzór wytrzymałościowy.

W rozciąganiu mimośrodowym naprężenia wyznaczymy ze wzoru

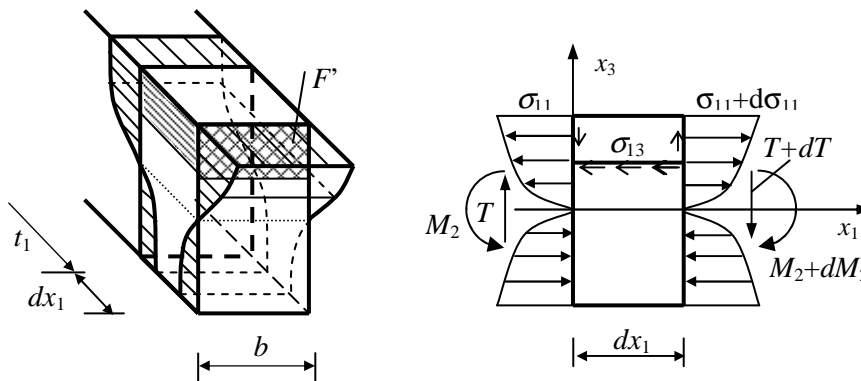
$$\sigma_{11}^n = \left(\frac{P}{F} \right)^n \left[1 + \left(\frac{\overset{\circ}{x}_3}{(i_{22}(N+1))^2} \right)^n x_3 + \left(\frac{\overset{\circ}{x}_2}{(i_{33}(N+1))^2} \right)^n x_2 \right],$$

$$[i_{22}(N+1)]^2 = \frac{J_{22}(N+1)}{F}, \quad [i_{33}(N+1)]^2 = \frac{J_{33}(N+1)}{F}$$

Podobnie jak poprzednio, kiedy $n=1$, otrzymamy klasyczny wynik znany z elementarnej wytrzymałości materiałów.

e) Ścinanie – zadanie nieliniowo - sprężyste

Rozkład naprężeń tnących w zginanym pręcie wynika ze wzoru Żurawskiego, który otrzymujemy z warunku równowagi ugiętego elementu w przekrojach położonych blisko siebie w których występuje moment zginający M i siła poprzeczna T .



Rys. 5.0b

Naprężenia normalne w zginaniu nieliniowym określone są równaniem

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{J_{22}(N+1)} (x_3)^N$$

a przyrost siły osiowej dN w przekroju położonym nad rozpatrywanym włóknem określa równanie

$$dN = \int_{F'} d\sigma_{11} dF' = \frac{dM}{J_{22}(N+1)} \int_{F'} x_3^N dF' = \frac{S(N)}{J_{22}(N+1)} dM$$

Z warunków równowagi: $-N + (N + dN) = \sigma_{13} dx_1 b$ wynika

$$\sigma_{13} = \frac{S(n)}{J_{22}(N+1)} \frac{dM}{dx_1 b} \rightarrow \sigma_{13} = \frac{TS(N)}{J_{22}(N+1)}$$

$$S(N) = \int_{F'} x_3^N dF'$$

Otrzymana zależność jest uogólnieniem wzoru Żurawskiego na przypadek nieliniowo-sprężysty.

W szczególności dla $N=1$ otrzymamy klasyczny wzór Żurawskiego stosowany w obliczeniach wytrzymałościowych

$$\sigma_{13} = \tau = \frac{TS}{bJ_{22}}$$

f) Ściskanie mimośrodowe w zakresie nieliniowo-lepkosprężystym

Równania fizyczne mają tu postać $\sigma_{11} = A * \varepsilon_{11}^N$ stąd $\varepsilon_{11}^N = G * \sigma_{11}$ lub $\varepsilon_{11} = (G * \sigma_{11})^{\frac{1}{N}}$. Zachodzi $G * A = \delta$.

Na podstawie równań fizycznych wyznaczamy relacje między wydłużeniami ε_{11}^0 a siłami osiowymi P

$$\varepsilon_{11}^0 = \left(G * \frac{P}{F} \right)^{\frac{1}{N}}$$

Analogiczne zależności łączące momenty M_2 i M_3 z krzywiznami κ_2 i κ_3 ma postać

$$(\varepsilon'_{11})^N = G * \sigma_{11} \rightarrow \int_F (\kappa_2 x_3)^N x_3 dF = G * \int_F \sigma'_{11} x_3 dF$$

$$\kappa_2^N = \frac{G * M_2}{J_{22}(N+1)} \rightarrow \kappa_2 = \left(\frac{G * M_2}{J_{22}(N+1)} \right)^{\frac{1}{N}}$$

$$(\varepsilon''_{11})^N = G * \sigma''_{11} \rightarrow \int_F (\kappa_3 x_2)^N x_2 dF = G * \int_F \sigma''_{11} x_2 dF$$

$$(\kappa_3)^N = \frac{G * M_2}{J_{33}(N+1)} \rightarrow \kappa_3 = \left(\frac{G * M_2}{J_{33}(N+1)} \right)^n$$

W konsekwencji odkształcenie ϵ_{11} obliczamy z wzoru

$$\epsilon_{11} = \left(G * \frac{P}{F} \right)^n + \left(G * \frac{M_2}{J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(G * \frac{M_3}{J_{33}(N+1)} \right)^n x_2$$

W przypadku szczególnym, kiedy $P(t) = P_0 A(t)$, $M_2 = \bar{M}_2 A(t)$,
 $M_3 = \bar{M}_3 A(t)$, gdzie A jest funkcją czasu spełniającą równanie $A * G = H \frac{1}{A_0}$

$$\epsilon_{11} = \left(\frac{P}{A_0 F} \right)^n + \left(\frac{M_2}{A_0 J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{M_3}{A_0 J_{33}(N+1)} \right)^n x_2$$

g) Wytyżenie materiału

Omawiane w tym rozdziale przypadki wytrzymałościowe zakładają możliwość jednoczesnego występowania różnych rodzajów sił przekrojowych np. siły ściskającej i momentów zginających. Można się wówczas spodziewać, że i w punktach przekroju wystąpią złożone stany naprężeń. Powstaje problem oceny wytyżenia związany z tymi złożonymi stanami naprężeń. Do tego celu wykorzystujemy hipotezy wytyżeniowe, które pozwalają porównywać złożone stany naprężeń z jednoosiowymi. Najczęściej korzystamy w tych przypadkach z hipotezy wytyżeniowej Hubera-Miesesa-Hencky'ego (H-M-H) postaci

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \leq k$$

gdzie $\sigma_{11}, \dots, \sigma_{23}$ są współrzędnymi tensora naprężeń, a k – wartością krytyczną, którą możemy interpretować jako naprężenie dopuszczalne, granicę plastyczności, sprężystości czy wytrzymałości.

ZADANIE 5.1.

Analizujemy zginanie ukośne przekroju w zakresie liniowym i nieliniowo - sprężystym. Należy wykazać, iż punkty przekroju o tych samych naprężeniach wyznaczają rodzinę prostych równoległych. Należy również określić nachylenie tych prostych względem głównych centralnych osi bezwładności.

Rozwiązanie:

Punktem wyjściowym rozważań są tu równania określające rozkłady naprężeń w przekroju. Znamy też położenie głównych centralnych osi bezwładności.

a) W **zadaniach liniowych** rozkłady σ_{11} mają postać (przy założeniu, że wypadkowa momentu zginającego leży w I-szej ćwiartce układu osi głównych)

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{J_{22}} x_3 - \frac{M_3}{J_{33}} x_2$$

Dla stałej wartości naprężeń $\sigma_{11} = a$ otrzymujemy równanie prostej

$$x_3 = \frac{M_3 J_{22}}{M_2 J_{33}} x_2 + \frac{J_{22} a}{M_2}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{M_3 J_{22}}{M_2 J_{33}}$$

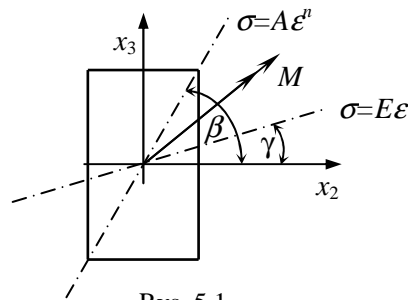
które jest jednocześnie miejscem geometrycznym punktów o wartościach naprężeń $\sigma_{11} = a$.

b) W **zadaniach nieliniowych**, gdy $\sigma_{11} = A \varepsilon_{11}^N$ obowiązuje równanie

$$\sigma_{11}^n = \left(\frac{M_2}{J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{M_3}{J_{33}(N+1)} \right)^n x_2$$

które dla warunku $\sigma_{11} = a$ prowadzi również do równania prostej

$$x_3 = \left(\frac{M_3 J_{22}(N+1)}{M_2 J_{33}(N+1)} \right)^n x_2 + \left(\frac{J_{22}(N+1)}{M_2} \right)^n a^n, \quad \text{tg } \beta = \left(\frac{M_3 J_{22}(N+1)}{M_2 J_{33}(N+1)} \right)^n$$



Rys. 5.1

Dla $a = 0$ otrzymamy tzw. równanie osi obojętnej. Z porównania obu równań wynika, iż różne będą m.in. nachylenia osi obojętnej ($\beta \neq \gamma$) w tym samym przekroju i dla tego samego momentu zginającego, ale różnych fizycznie materiałów.

ZADANIE 5.2.

W prostym zginaniu linia działania momentu zginającego pokrywa się z osią obojętną. Określić ograniczenia nałożone na moment zginający aby linia działania momentu zginającego i oś obojętna były współliniowe w zginaniu ukośnym. Problem przeanalizować również w zakresie nieliniowym.

Rozwiązanie:

Momenty M_2 i M_3 jako rzuty wektora momentu M liczone względem osi głównych x_2 i x_3 są postaci

$$M_2 = M \cos \alpha, \quad M_3 = M \sin \alpha \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_3}{M_2}$$

a) W zadaniu liniowym oś obojętną określa równanie

$$\sigma_{11} = 0 \quad \rightarrow \quad x_3 = \frac{J_{22} M_3}{J_{33} M_2} x_2 \quad \rightarrow \quad x_3 = \operatorname{tg} \gamma x_2$$

Warunek współliniowości $\alpha = \gamma$

$$\alpha = \gamma \quad \rightarrow \quad \frac{J_{22} M_3}{J_{33} M_2} = \frac{M_3}{M_2} \quad \rightarrow \quad J_{33} = J_{22}$$

prowadzi do wymogu, aby momenty bezwładności J_{22} i J_{33} były sobie równe.

b) W zadaniu nieliniowym oś obojętną $\sigma_{11} = 0$ definiuje równanie

$$\sigma_{11}^n = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{M_2}{J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{M_3}{J_{33}(N+1)} \right)^n x_2 = 0$$

stąd

$$x_3 = \left(\frac{M_3 J_{22}(N+1)}{M_2 J_{33}(N+1)} \right)^n x_2$$

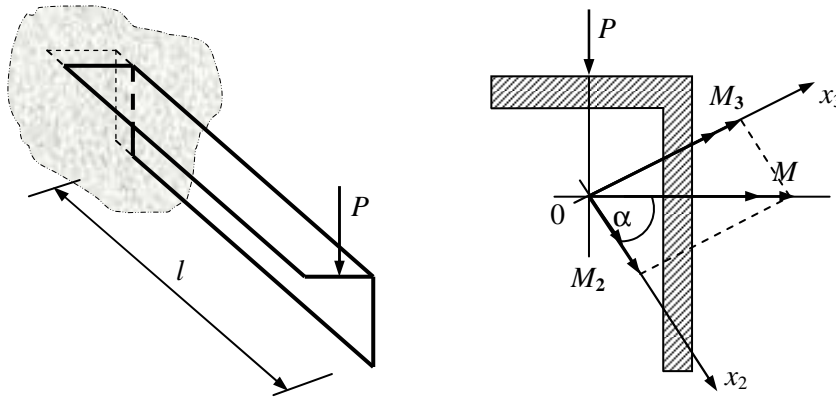
Podobnie jak poprzednio, współliniowość wymaga aby $\alpha = \beta$, stąd

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \rightarrow \frac{M_3}{M_2} = \left(\frac{M_3 J_{22}(N+1)}{M_2 J_{33}(N+1)} \right)^n; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Otrzymaliśmy tu wynik odmienny od poprzedniego, słusznego w zadaniach liniowych.

ZADANIE 5.3.

Należy określić rozkłady naprężeń jako funkcje położenia we wsporniku wykonanym z kątownika i obciążonym siłą pionową P . Problem przeanalizować należy w zakresie liniowym i nieliniowym sprężystym.



Rys. 5.3

Rozwiązanie

Największy moment wystąpi w utwierdzeniu belki $M = Pl$, przy czym wektor momentu zginającego jest prostopadły do siły P . Żadna z osi nie jest współliniowa z wektorem momentu M . Wystąpi tu więc zginanie ukośne.

Rozkładając wektor M względem osi x_2 i x_3 otrzymamy

$$M_2 = M \cos \alpha, \quad M_3 = M \sin \alpha, \quad M = Pl$$

a) Rozkład naprężeń normalnych w **zadaniu liniowo - sprężystym** określa wyrażenie

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{J_{22}} x_3 + \frac{M_3}{J_{33}} x_2 = M \left(\frac{\cos \alpha}{J_{22}} x_3 - \frac{\sin \alpha}{J_{33}} x_2 \right)$$

stąd

$$\sigma_{11} = M \frac{\cos \alpha}{J_{22}} \left(x_3 - \frac{J_{22}}{J_{33}} \operatorname{tg} \alpha x_2 \right)$$

Podstawiając współrzędne punktów przekroju $F(x_2, x_3)$ otrzymamy liniowy rozkład naprężeń normalnych w utwierdzeniu belki. Największe naprężenia wystąpią w punktach najbardziej odległych od osi obojętnej, czyli prostej o równaniu

$$x_3 = \frac{J_{22}}{J_{33}} \operatorname{tg} \alpha x_2$$

b) W zakresie **nieliniowo - sprężystym** $\sigma_{11} = A \varepsilon_{11}^N$ rozkład naprężeń w kątowniku określa zależność

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^n &= \left(\frac{M_2}{J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{M_3}{J_{33}(N+1)} \right)^n x_2 = \\ &= M^N \left[\left(\frac{\cos \alpha}{J_{22}(N+1)} \right)^n x_3 - \left(\frac{\sin \alpha}{J_{33}(N+1)} \right)^n x_2 \right] \end{aligned}$$

lub

$$\sigma_{11} = M \frac{\cos \alpha}{J_{22}(N+1)} \left[x_3 - \left(\frac{J_{22}(N+1)}{J_{33}(N+1)} \operatorname{tg} \alpha \right)^n x_2 \right]^N$$

Podstawiając teraz współrzędne (x_2, x_3) punktów przekroju belki wyznaczamy rozkłady naprężeń normalnych w utwierdzeniu belki.

Równanie osi obojętnej przyjmie przy tym postać

$$x_3 = \left(\frac{J_{22}(N+1)}{J_{33}(N+1)} \operatorname{tg} \alpha \right)^n x_2$$

c) Z porównania wyrażeń na naprężenia w tych samych zadaniach zginania ukośnego w liniowych i nieliniowych prawach fizycznych wynika zależność

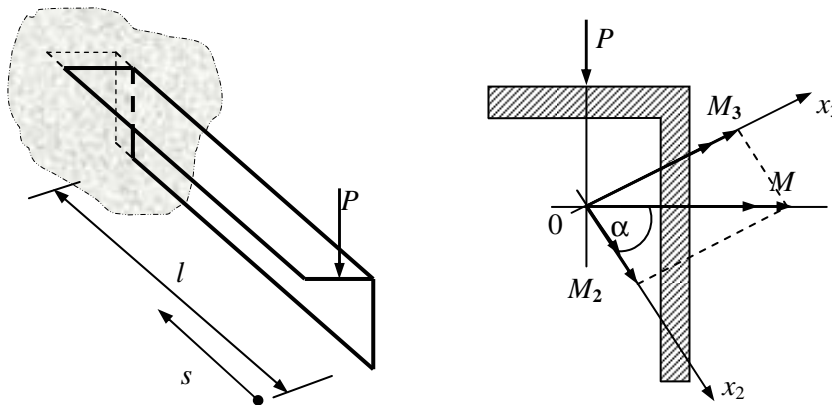
$$\frac{\sigma_{11}(x_2, x_3)_l}{\sigma_{11}(x_2, x_3)_{nl}} = \frac{\frac{1}{J_{22}} \left[x_3 - \left(\frac{J_{22}}{J_{33}} \operatorname{tg} \alpha \right) x_2 \right]}{\frac{1}{J_{22}(N+1)} \left[x_3 - \left(\frac{J_{22}(N+1)}{J_{33}(N+1)} \operatorname{tg} \alpha \right) x_2 \right]^N}$$

Podstawiając współrzędne punktów przekroju możemy obliczyć stosunek naprężeń w obu modelach ciała sprężystego.

Podany w punkcie c) wzór na iloraz $\frac{(\sigma_{11})_l}{(\sigma_{12})_{nl}}$ ma charakter ogólny i jest słuszny we wszystkich zadaniach zginania ukośnego.

ZADANIE 5.4.

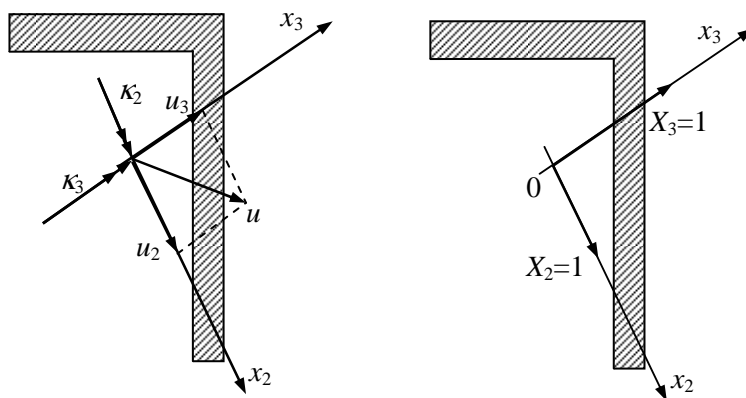
We wsporniku wykonanym z kątownika i obciążonym siłą pionową należy określić przemieszczenie swobodnego końca wspornika w liniowym i nieliniowym zakresie.



Rys. 5.4a

Rozwiązanie:

Podobnie jak w poprzednim zadaniu funkcję momentu zginającego rozłożymy względem osi głównych. Poszukiwane przemieszczenia uzyskamy sumując stany przemieszczeń wynikające z istnienia momentów M_2 , M_3 oraz krzywizn κ_2 i κ_3 .



Rys. 5.4b

Zgodnie z podanymi rozkładami krzywizn κ_2 i κ_3 oraz przemieszczeń u_2 i u_3 można zapisać ogólne wzory

$$u_2 = \int_0^l \kappa_3 M_1(X_2=1) ds,$$

$$u_3 = -\int_0^l \kappa_2 M_1(X_3=1) ds, \quad u = \sqrt{(u_2)^2 + (u_3)^2}$$

gdzie $M_1(X_2=1)$ i $M_1(X_3=1)$ są funkcjami momentów zginających pochodzących odpowiednio od sił jednostkowych, współliniowych z osiami bezwładności x_2 i x_3 . Podane rozważania są ogólne, słuszne niezależnie od rodzaju materiału.

a) W zakresie liniowo - sprężystym

$$\kappa_2 = \frac{M_2}{EJ_{22}}, \quad \kappa_3 = \frac{M_3}{EJ_{33}} \quad \text{i} \quad M_2 = P \cos \alpha, \quad M_3 = P \sin \alpha$$

$$M_1(X_2=1) = s, \quad M_1(X_3=1) = s$$

stąd

$$u_2 = \int_0^l \frac{Ps}{EJ_{33}} \sin \alpha \, ds = \frac{Pl^3}{3EJ_{33}} \sin \alpha,$$

$$u_3 = -\int_0^l \frac{Ps}{EJ_{22}} \cos \alpha \, ds = -\frac{Pl^3}{3EJ_{22}} \cos \alpha$$

$$u = \frac{Pl^3}{3E} \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{J_{33}}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{J_{22}}\right)^2}$$

Tutaj u_2 i u_3 są wartościami przemieszczeń liczonych względem osi głównych x_2 i x_3 równoległe do nich.

b) W zadaniu nieliniowym wzory ogólne pozostaną bez zmian, należy tylko zmienić wyrażenia na krzywizny κ_2 i κ_3 .

$$\kappa_2 = \left(\frac{Ps \cos \alpha}{AJ_{22}(N+1)}\right)^n \quad \text{i} \quad \kappa_3 = \left(\frac{Ps \sin \alpha}{AJ_{33}(N+1)}\right)^n$$

stąd

$$u_2 = \int_0^l \left(\frac{Ps}{AJ_{22}(N+1)} \sin \alpha\right)^n s ds = \left(\frac{P \sin \alpha}{AJ_{22}(N+1)}\right)^n \frac{l^{n+2}}{n+2}$$

$$u_3 = \int_0^l \left(\frac{Ps}{AJ_{33}(N+1)} \cos \alpha\right)^n s ds = \left(\frac{P \cos \alpha}{AJ_{33}(N+1)}\right)^n \frac{l^{n+2}}{n+2}$$

$$u = \frac{Pl^{n+2}}{(n+2)A} \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{J_{33}(N+1)}\right)^{2n} + \left(\frac{\cos \alpha}{J_{22}(N+1)}\right)^{2n}}$$

c) W zadaniu lepkosprężystym o równaniach fizycznych

$$\varepsilon = G * d\sigma \text{ i } \kappa = \frac{G * dM}{J_{22}} \quad \text{krzywizny } \kappa_2 \text{ i } \kappa_3 \text{ mają postać}$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{J_{22}} G * dM_2, \kappa_3 = \frac{1}{J_{33}} G * dM_3$$

Wzory na składowe przemieszczenia u_2 i u_3 przyjmą formę

$$u_2 = \int_0^l G * dP \frac{\sin \alpha}{J_{33}} s ds = G * dP \frac{l^3}{3J_{33}} \sin \alpha$$

$$u_3 = -\int_0^l G * dP \frac{\cos \alpha}{J_{22}} s ds = -G * dP \frac{l^3}{3J_{22}} \cos \alpha$$

$$u = G * dP \frac{l^3}{3} \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{J_{33}}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{J_{22}}\right)^2} \quad \text{gdzie} \quad G * dP = \int_0^t G(t - \tau) dP(\tau)$$

Z porównania wzorów na przemieszczenia wolnego końca wspornika przy zginaniu ukośnym wynika podobieństwo rezultatów liniowo-sprężystych i lepkosprężystych. W tym ostatnim przypadku będą się jednak z czasem zmieniać przemieszczenia w wyniku procesów reologicznych.

ZADANIE 5.5.

Statycznie wyznaczalny pręt lepkosprężysty podlega zginaniu ukośnemu. Należy określić zmiany obciążenia $P = P_0 f(t)$ tak aby odkształcenia pręta były stałe w czasie.

Rozwiązanie:

Analizując wyrażenie na odkształcenia pręta lepkosprężystego zginanego ukośnie opisane wzorem

$$\varepsilon_{11}(x_2, x_3, t) = \frac{M_2}{J_{22}} * dG x_3 - \frac{M_3}{J_{33}} * dG x_2$$

możemy stwierdzić, że odkształcenia ε_{11} będą stałe, a w konsekwencji również przemieszczenia pręta jeżeli iloczyny splotowe spełniają warunek

$$M_2 * dG = AH(t) \quad , \quad M_3 * dG = BH(t)$$

Wówczas prawa strona wyrażenia określającego odkształcenia jest stała, a tym samym i lewa jest niezmienna w czasie. Zauważmy ponadto, że dla obciążeń zadanych w postaci $P = P_0 f(t)$ funkcje momentów zginających M , M_2 i M_3 w zadaniach statycznie wyznaczalnych przyjmą formę

$$M = \bar{M} f(t), \quad M_2 = \bar{M}_2 f(t), \quad M_3 = \bar{M}_3 f(t)$$

Poszukiwaną funkcję $f(t)$ znajdziemy z porównania relacji łączących krzywiznę z momentem zginającym

$$\sigma = \varepsilon * dE \quad \rightarrow \quad M = J_{22} \kappa * dE$$

stąd dla

$$\kappa = \bar{\kappa}H(t) \quad \text{zachodzi} \quad \bar{M}f(t) = J_{22} \bar{\kappa}H(t) * dE(t)$$

$$\text{oraz} \quad \frac{\bar{M}}{EJ_{22}} f(t) = \bar{\kappa}H(t) * dE(t) \frac{1}{E}$$

Ostatecznie wobec zależności $\bar{\kappa} = \frac{\bar{M}}{EJ_{22}}$ wynika, że

$$f(t) = \frac{1}{E} H(t) * dE(t) \quad \text{czyli} \quad f(t) = \frac{1}{E} \int_0^t dE(\tau) = \frac{1}{E} E(t)$$

Wnosimy stąd, iż zmiana obciążenia zgodnie z funkcją relaksacji zapewnia niezmiennosc przemieszczeń.

ZADANIE 5.6.

Należy określić rdzeń przekroju prostokątnego o wymiarach $a \times h$ w liniowym i nieliniowym zadaniu sprężystym.

Rozwiązanie:

Osie symetrii prostokąta x_2 i x_3 są tutaj głównymi centralnymi osiami bezwładności w zadaniach liniowych jak i nieliniowych.

a) W zadaniu liniowym równanie osi obojętnej otrzymamy z warunku

$$\sigma_{11} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{x_3 x_3}{(i_{22})^2} + \frac{x_2 x_2}{(i_{33})^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x_3 = - \frac{x_2}{x_3} \left(\frac{i_{22}}{i_{33}} \right)^2 x_2 - \frac{i_{22}}{x_3}$$

Analizować będziemy teraz szczególne usytuowanie osi obojętnej, kiedy pokrywa się ona z krawędziami prostokąta, czyli $x_3 = \pm \frac{h}{2}$, $x_2 = \pm \frac{a}{2}$

Otrzymamy wówczas

$$x_3 = \pm \frac{h}{2} \quad \rightarrow \quad 1 \pm \frac{x_3}{(i_{22})^2} \frac{h}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad x_3 = \pm \frac{2}{h} (i_{22})^2 = \pm \frac{h}{6}$$

$$x_2 = \pm \frac{a}{2} \quad \rightarrow \quad 1 \pm \frac{x_2}{(i_{33})^2} \frac{a}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \pm \frac{2}{a} (i_{33})^2 = \pm \frac{a}{6}$$